14.コンタクト・プロセスにおける感染領域の定常分布ついて(「パターン形成、運動及びその統計」研究会,研究会報告)

香取, 眞理; 今野, 紀雄

14. コンタクト・プロセスにおける感染領域の定常分布ついて

香取眞理（東大理）、今野紀雄（室蘭工大）

1 はじめに

コンタクト・プロセスとは、状態空間 $X = \{0,1\}^{\mathbf{Z}^d}$ ($\mathbf{Z}^d$ は d 次元の hyper-cubic 格子を表す）を持つ連続時間のマルコフ過程であり、Harris[1] によって導入された。このプロセスは、各格子点 x 上の確率変数 $\eta(x)$ が 0 のときは健康な人を、1 のときは感染者をそれぞれ表していると見なすと、伝染病の伝播の簡単な数理モデルと見なせる。ダイナミックスとしては、健康な人はその最近接格子点上の感染者の数に比例して感染し（比例定数を λ とする)、逆に感染者は一定の rate（これを 1 と規格化する）で健康を回復するものを考える;

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 \to 0 & \text{at rate } 1 \\ 0 \to 1 & \text{at rate } \lambda \sum_{y:|y-x|=1} \eta(y) \end{cases} \tag{1.1}$$

ここで、λ を感染率と呼ぶ。

このプロセスは、高エネルギー物理において研究された Reggeon Quantum Spin Model と等価であり [2,3,4]、また自触媒化学反応の Schlögl's First Model [5] の d 次元格子上のある簡単化されたモデルである [6]。また、 Oriented Percolation とも関係深い [7]。このプロセスを含む無限粒子系についての教科書として、参考文献 [8,9,10] がある。

2 感染領域の定常分布

Yを $\mathbf{Z}^d$のなかの有限な部分集合の集まりとする。コンタクト・プロセスの初期状態は、

$$A = \{x : \eta(x) = 1\}, \tag{2.1}$$

と置くことによって、このYの元Aによって指定できる。いま、感染率λで初期状態がAである $\mathbf{Z}^d$上のコンタクト・プロセスの時刻tでの状態を $\eta^A_{d,\lambda}(t)$ と書くことにする。我々は、感染領域 A の定常状態での残存確率（Survival Probability）として$\sigma_{d,\lambda}(A)$ を次式で定義する。

$$\sigma_{d,\lambda}(A) = \lim_{t\to\infty} P^A(\eta^A_{d,\lambda}(t) \neq \emptyset). \tag{2.2}$$

あるいは、コンタクト・プロセスの Upper Invariant Measure を$\nu_{d,\lambda}$と書くとこれは

$$\sigma_{d,\lambda}(A) = 1 - E_{\nu_{d,\lambda}}[\prod_{x\in A}(1-\eta(x))], \tag{2.3}$$

と書ける。但し、$E_{\nu_{d,\lambda}}[\cdot]$ は measure $\nu_{d,\lambda}$上の期待値である。

コンタクト・プロセスは、感染率λをパラメータとして変えてみると、$d \geq 1$ のとき、その定常分布において相転移を起こすことが知られている。この臨界値を$\lambda_c(d)$ と書くと$\lambda \leq \lambda_c(d)$ では、$\nu_{d,\lambda} = \delta_0$ (δ_0は $\eta \equiv 0$ の自明な定常分布）であり、任意の $A \in Y$に対して$\sigma_{d,\lambda}(A) = 0$ である。これに対して、$\lambda > \lambda_c(d)$ では非自明な定常分布$\nu_{d,\lambda}$が存在し$\sigma_{d,\lambda}(A) > 0$ となる;

$$\lambda_c(d) = \inf\{\lambda \geq 0 : \sigma_{d,\lambda}(A) > 0\}, \quad \text{for any} \quad A \in Y. \tag{2.4}$$

コンタクト・プロセスは、Non-Reversible な（詳細つりあいを満たさない）プロセスであり、それにも関わらず存在する定常分布$\nu_{d,\lambda}$の詳しい性質は未だ知られていない。実際一次元系においても上述の臨界値 $\lambda_c(1)$ は厳密には求められていないのである。

3 $\sigma_{d,\lambda}(A)$ に対する厳密な上限

我々は、この非自明な定常分布の上での期待値である$\sigma_{d,\lambda}(A)$ に対して、任意の次元 d 、及び任意の感染領域 A において、厳密な意味で上限を与える関数を求めた。我々の結果は次の定理にまとめられる。

定理1 [11]. $\lambda > (2d-1)^{-1}$のとき、$\sigma_{d,\lambda}(A)$ は $h_{d,\lambda}(A)$ で上からおさえられる。但し、$h_{d,\lambda}(A)$ は次式で与えられる、

$$h_{d,\lambda}(A) = 1 - \alpha_1(d,\lambda)^{|A|}\alpha_2(d,\lambda)^{b(A)}, \tag{3.1}$$

ここで、

$$\alpha_1(d,\lambda) = \frac{2d-1}{2d(2d-1)\lambda - 1}, \quad \alpha_2(d,\lambda) = \frac{2d(2d-1)\lambda - 1}{(2d-1)^2\lambda}, \tag{3.2}$$

であり、$|A|$ は集合 A の元の個数（cardinality）を、また $b(A)$ は A に含まれる最近接格子点対の個数を表す。特に A が一点のみの集合 $\{x\}$ の場合$\sigma_{d,\lambda}(A)$ は定常分布での感染者の割合$\rho_{d,\lambda}$を表す（これはオーダーパラメータとしての性質を持つ）が、上の結果はこれに対して、次のような上限を与える;

$$\rho_{d,\lambda} \leq \frac{2d\{(2d-1)\lambda - 1\}}{2d(2d-1)\lambda - 1}. \tag{3.3}$$

コンタクト・プロセスの基本的性質より $\rho_{d,\lambda}$は λ の非減少関数であることが導けるため、この定理から次の系が得られる。

系 1.

$$\lambda_c(d) \geq (2d-1)^{-1}. \tag{3.4}$$

注 1. 臨界値$\lambda_c(d)$ に対する系1の下限は、Harris によってすでに証明されている [1]。この下限に対する改良については、我々の最近の論文 [12] を参照のこと。

注 2. Griffeath が、参考文献 [8] の p.31 の Proposition (4.4) で、$d=1$ の場合に限り (3.3) に対して証明を与えている。我々の定理1は、この結果を一般の次元 d 、一般の感染領域 A に対して拡張したものである。

4 議論

我々の上限関数 $h_{d,\lambda}(A)$ は A のなかの格子点の個数 $|A|$ と最近接格子点対の個数 $b(A)$ のみの関数になっており、A のより精密なパターンの違いには依存しない。この意味で、これは$\sigma_{d,\lambda}(A)$ に対する Pair 近似（或いは Bethe 近似）と呼べるかもしれない。磁性体のイジング・モデルにおける Bethe 近似が、磁化の真の値の上限を与えていることが Krinsky によって証明されているが [13] 、我々の結果は、ちょうどこれに対応していると思われる（一つ注意すべきなのは、イジング・モデルにおいては、Bethe 近似は Bethe 格子上で厳密解を与えるが、いま扱っているコンタクト・プロセスの場合はそうはなっていないことである。Bethe 格子上の厳密解を与えることじたいコンタクト・プロセスの場合難問である)。当然、定理1よりも弱い上限として平均場（Weiss）近似に相当する（cardinality $|A|$ のみに依存する）上限関数を与えることもできる [11]。

最近、コンタクト・プロセスの感染領域の定常分布を表す$\sigma_{d,\lambda}(A)$ に対する上限をさらに改良することができることが分かった [14]。厳密な上限関数は一般に、「拡張された Markov Extension 」によって構成できるようである。実際、我々は1次元系の場合、上述の定理1の上限関数 $h_{d,\lambda}(A)$ が「2点の Markov

Extension」によって得られることを示し、さらに「3点のMarkov Extension」によって構成できるある関数が、$\lambda > (1+\sqrt{37})/6 = 1.18046...$において、よりきつい上限を与えることを証明した。詳しくは、参考文献[14]を参照のこと。

参考文献

[1] T.E.Harris, Contact interactions on a lattice, *Ann.Probab.***2**:969-988(1974).

[2] D.Amati, M.Le Bellac, G.Marchesini and M.Ciafaloni, Reggeon field theory for $\alpha(0) > 1$, *Nucl.Phys.* **B112**:107-149 (1976).

[3] R.C.Brower,M.A.Furman and K.Subbarao, Quantum spin model for Reggeon field theory, *Phys.Rev.***D15**:1756-1771(1977). R.C.Brower,M.A.Furman and M.Moshe, Critical exponents for the Reggeon quantum spin model,*Phys.Lett.* **76B**:213-219 (1978).

[4] P.Grassberger and A.de la Torre, Reggeon field theory (Schlögl's first model) on a lattice :Monte Carlo calculations of critical behavior, *Ann.Phys.***122**: 373-396(1979).

[5] F.Schlögl, Chemical reaction models for non-equilibrium phase transitions, *Z.Physik* **253**:147-161 (1972).

[6] P.Grassberger and M.Scheunert, Fock-space methods for identical classical objects, *Fortschr. Phys.***28**: 547-578 (1980).

[7] R.Durrett, Oriented percolation in two dimensions, *Ann.Probab.***12**:999-1040(1984).

[8] D.Griffeath, *Additive and Cancellative Interacting Particle Systems, Springer Lecture Notes in Mathematics*, Vol.724 (Springer-Verlag, New York, 1979).

[9] T.M.Liggett, *Interacting Particle Systems*, (Springer-Verlag, New York,1985)

[10] R.Durrett, *Lecture Notes on Particle Systems and Percolation*, (Wadsworth and Brooks /Cole Advanced Books & Software, California,1988).

[11] M.Katori and N.Konno, An upper bound for survival probability of infected region in the contact processes, submitted to J.Stat.Phys.

[12] M.Katori and N.Konno, Correlation inequalities and lower bounds for the critical value λ_c of contact processes, *J.Phys.Soc. Jpn***59**:877-887(1990).

[13] S.Krinsky, Bethe approximation to the magnetization is upper bound for Ising ferromagnet, *Phys.Rev***11**:1970 (1975).

[14] M.Katori and N.Konno, Three-Point Markov extension and an improved upper bound for survival probability of the one-dimensional contact process, submitted to J.Stat.Phys.

[15] N.Konno and M.Katori, Applications of the CAM based on a new decoupling procedure of correlation functions in the one-dimensional contact process, *J.Phys.Soc.Jpn***59**:1581-1592 (1990).